

Soluție

1. Fie $a = \sqrt{2}$ și $b = -\sqrt{2}$. Avem $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $a + b = 0 \in \mathbb{Q}$. Afirmația din enunț este falsă.

2. $f(f(x)) = f^2(x) \Rightarrow x + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x \in \{-3, 0\}$.

3. Notăm $2^x = y$ și obținem ecuația $y^2 - y - 12 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -3$ și $y_2 = 4$.

$2^x = -3$ nu are soluții, iar $2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

4. Produsul cartezian $A \times A$ are 36 de elemente: $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$.

Fie $(a, b) \in A \times A$. Produsul $a \cdot b$ este impar dacă și numai dacă a și b sunt impare.

Cazurile favorabile sunt: $(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3)$ și $(5, 5)$.

Probabilitatea cerută este $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$.

5. $AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ latura pătratului este 2, deci aria este 4.

6. Avem $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ = 2 \sin 75^\circ = 2 \sin(45^\circ + 30^\circ) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.