Soluție

1. Fie r rația progresiei. Avem $a_6 = a_3 + 3r$ și $a_{16} = a_{19} - 3r$, deci $a_6 + a_{16} = a_3 + a_{19} \Rightarrow a_6 + a_{16} = 10$.

2. Ecuația dată are două rădăcini reale distincte dacă şi numai dacă $\Delta > 0$. Avem $\Delta = m^2 + 4m - 4$.
$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}, +\infty\right)$.

3. Făcând substituția $\lg x = y$, ecuația devine $y^2 + y - 6 = 0$ de unde obținem $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.
Avem $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$, iar $\lg x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1000}$.

4. $f(1) > f(2) > f(3) = 1 \Rightarrow$ numărul funcțiilor *f* este egal cu numărul funcțiilor $g:\{1,2\} \to \{2,3,4,5\}$ strict descrescătoare, adică $C_4^2 = 6$.

5. Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ} = (a-2)\vec{i} + (b+1)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{NP} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a - 2 = 1$ şi $b + 1 = 2$. Punctul căutat este $Q(3, 1)$.

6. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$ de unde obținem $AM^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cdot \cos A\right)$. Din teorema cosinusului avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow 2AB \cdot AC \cdot \cos A = AB^2 + AC^2 - BC^2$.
Atunci $AM^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$, de unde $AM = \frac{\sqrt{10}}{2}$.