

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Fie z numărul din enunț. Avem $z = 2^6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^6 = 2^6 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^6$. Folosind formula lui Moivre,

obținem: $z = 2^6 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^6 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -64$.

2. $(f \circ f)(512) = f(f(512)) = \frac{1}{\sqrt[3]{f(512)}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2$.

3. Utilizând formula $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, ecuația devine $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Notăm $y = \sin x$ și obținem ecuația $2y^2 - y - 1 = 0$ cu soluțiile $-\frac{1}{2}$ și 1 .

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, iar $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. Fiecare submulțime cu trei elemente a lui M poate fi ordonată strict crescător într-un singur mod. Numărul tripletelor (a, b, c) cu proprietatea că $a, b, c \in M$ și $a < b < c$ este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M , adică $C_6^3 = 20$.

5. Punctul $A(0, 3)$ se află pe dreapta d_1 . Atunci distanța cerută este

$$d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 11|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

6. Avem $\overline{AD}^2 = \|\overline{AD}\|^2 = 4$, iar $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AD}\| \cdot \cos 60^\circ = 1$.

Atunci $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = (\overline{AB} + \overline{AD}) \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2 \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 5$.