

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluții**

**1.a)** Se demonstrează prin inducție matematică.

**b)**  $a_{n+1} - a_n = -a_n \cdot \sqrt{a_n} < 0 \Rightarrow$  șirul dat este strict descrescător.

**c)** Cum  $a_k^2 < a_k \sqrt{a_k} = a_k - a_{k+1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , însumând se deduce relația cerută.

**2.a)**  $F$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .  $F'(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = f(x)$ .

**b)** Aria cerută este  $A = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1) \Big|_0^1 = \ln 3$ .

**c)** Limita cerută este  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(n) - F(-n)) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ .