Soluții

1.a) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x\cdot(x+1)^2},\ x>0$

b) $f'(x)=\frac{2}{9}\Leftrightarrow 2x^3-5x^2+20x-9=0\Leftrightarrow(2x-1)\left(x^2-2x+9\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Deoarece $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2+\frac{2}{3}\Rightarrow A\left(\frac{1}{2};-\ln 2+\frac{2}{3}\right)$ este punctul căutat.

c) Din subpunctul **a)** deducem ca $f'(x)>0,\ \forall x>1$. Deoarece funcția *f* este strict crescătoare pe $[1,\infty)$ şi $f(1)=0$, rezultă că $f(x)\geq 0, \forall x\in[1;\infty)$, de unde se deduce inegalitatea de demonstrat.

2.a) Se arată că *f* este strict descrescătoare. Se aplică teorema de medie (sau teorema lui Lagrange pentru o primitivă a funcției *f*).

b) $\int_1^n f(x)dx=\int_1^n x^{-2}dx=\left.\frac{-1}{x}\right|_1^n=1-\frac{1}{n}$. Limita cerută este egală cu 1.

c) Deoarece $\int_1^n f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$ adunând inegalitățile de la **a)** obținem:

$\sum_{k=2}^{n} f(k)\leq\int_1^n f(x)dx\Rightarrow a_n-f(1)\leq\int_1^n f(x)dx\Rightarrow a_n\leq\int_1^n f(x)dx+1\to 2$, deci şirul este mărginit superior.

Şirul fiind şi crescător , este convergent.