Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x)=e^{x\ln x}.(x\ln x)'=f(x)\cdot(\ln x+1), x>0$.

b) Funcția f este descrescătoare pe $\left(0;\frac{1}{e}\right]$ și crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$, deci ea este marginită inferior de numărul $f\left(\frac{1}{e}\right)$. Minimul cerut este $e^{\frac{-1}{e}}$.

c) $f''(x)=f(x)\cdot\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0$, deci f este convexă pe $(0,\infty)$.

2.a) $\int_0^1 g_2(x)\,dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+\frac{x^4}{1+x}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$.

b) $x\in[0;1]\Rightarrow 0\le\frac{x^{2n}}{1+x}\le x^{2n}$ și integrând aceste inegalități de la 0 la 1 , obținem inegalitățile cerute.

c) Integrând functia g_n obținem:

$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-...-x^{2n-1}+\frac{x^{2n}}{1+x}\right)dx\Rightarrow\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2n}+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$, utilizând și **b)** găsim că limita este $\ln 2$.