Soluții

1.a) $x=0$ este asimptota verticala. Functia f nu admite alte asimptote, pentru că f este continuă, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

b) Aplicăm T.Lagrange funcției f pe $[k,k+1]$ şi stabilim inegalitățile cerute.

c) Adunând inegalitățile de la **b)** obținem $x_n>\ln(n+1)-\ln n>0, n\in\mathbb{N}^*$. Apoi, $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$ şi folosind **b)** se deduce că şirul este descrescător.

2.a) $F'(x)=f(x), \forall x>-1 \Leftrightarrow \frac{a}{x+1}+\frac{2bx}{x^2+1}+\frac{c}{x^2+1}=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$, $\forall x>-1 \Leftrightarrow a=-1, b=\frac{1}{2}, c=1$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=\left(-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}(x)\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$.

c) $F'(x)=f(x)$, $x>-1$. Observăm că $F'(x)<0, x\in(-1;0)$ şi $F'(x)>0, x>0$, de unde deducem monotonia.