

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $x = 0$ este asimptota verticală. Funcția f nu admite alte asimptote, pentru că f este continuă,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

b) Aplicăm T.Lagrange funcției f pe $[k, k+1]$ și stabilim inegalitățile cerute.

c) Adunând inegalitățile de la **b)** obținem $x_n > \ln(n+1) - \ln n > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Apoi, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$ și folosind **b)** se deduce că șirul este descrescător.

2.a) $F'(x) = f(x), \forall x > -1 \Leftrightarrow \frac{a}{x+1} + \frac{2bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1} = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}, \forall x > -1 \Leftrightarrow a = -1, b = \frac{1}{2}, c = 1.$

b) $\int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = \left(-\ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg(x) \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}.$

c) $F'(x) = f(x), x > -1$. Observăm că $F'(x) < 0, x \in (-1; 0)$ și $F'(x) > 0, x > 0$, de unde deducem monotonia.