

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} .

b) Din ipoteză rezultă că $x_n = \sin x_n + n \geq n - 1$. Rezultă că șirul (x_n) este nemărginit.

c) $\frac{x_n}{n} \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n} \right]$. Limita cerută este egală cu 1 (teorema cleștelui).

2.a)
$$\int_0^2 \frac{1-x^2}{1-x} dx = \int_0^2 (1+x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{5}{2}.$$

b) $t \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \Rightarrow 0 \leq g_n(t) \leq g_n\left(\frac{1}{2}\right)$ deoarece funcția g_n este crescătoare pe $\left[0, \frac{1}{2} \right]$.

Rezultă că $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(t) dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}} dt = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Avem:
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) dx = \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Limita cerută este $-\ln(1-x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx \rightarrow -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$.