Soluții

1.a) $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Din ipoteză rezultă că $x_n = \sin x_n + n \geq n - 1$. Rezultă că şirul (x_n) este nemărginit.

c) $\frac{x_n}{n} \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right]$. Limita cerută este egală cu 1 (teorema cleştelui).

2.a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^2}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) dx = \left.\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{8}$.

b) $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq g_n(t) \leq g_n\left(\frac{1}{2}\right)$ deoarece funcția g_n este crescătoare pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Rezultă că $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(t) dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}} dt = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Avem : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}\right) dx = \left.\left(x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n}\right)\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + ... + \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Limita cerută este $\left. -\ln(1-x)\right|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx \to -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$.