Soluții

1.a) $f'(x)=\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{x^2+1}$; $f''(x)=\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\geq 0$, deci *f* este convexă.

b) $f''(x)\geq 0\Rightarrow f'$ este crescătoare. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\dfrac{\pi}{2}$, se obține concluzia.

c) $f'(0)=0$ și f' crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)\leq 0$ pentru $x<0$; $f'(x)\geq 0$ pentru $x>0$. Deducem că $x=0$ este punct de minim global pentru *f*, deci $f(x)\geq f(0)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

2.a) $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

b) $x\in[0;1]\Rightarrow\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\leq x^n$. Se integrează inegalitatea și se obține cerința problemei .

c) $I_n\geq 0,$ deoarece funcția de integrat este pozitivă. Folosind **b)** și teorema cleștelui se deduce că limita cerută este egală cu 0.