

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) = \arctg x - \frac{x}{x^2 + 1}$; $f''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, deci f este convexă.

b) $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$ este crescătoare. Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \frac{\pi}{2}$, se obține concluzia.

c) $f'(0) = 0$ și f' crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \leq 0$ pentru $x < 0$; $f'(x) \geq 0$ pentru $x > 0$. Deducem că $x = 0$ este punct de minim global pentru f , deci $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

b) $x \in [0; 1] \Rightarrow \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n$. Se integrează inegalitatea și se obține cerința problemei.

c) $I_n \geq 0$, deoarece funcția de integrat este pozitivă. Folosind **b)** și teorema cleștelui se deduce că limita cerută este egală cu 0.