Soluții

1.a) Avem că $f_s'(0)=-\frac{3}{4}$ şi $f_d'(0)=\frac{1}{4}$, deci *f* nu e derivabilă în $x = 0$.

b) $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2}, x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\\ \dfrac{e^{x}(x+1)}{(x+2)^2}, x\in(0,\infty)\end{cases}$; $x=-3$ este maxim şi $x=0$ este minim.

c) Şirul lui Rolle:

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$f(x)-m$	$-\infty$	$-m-e^3$	$-\infty \mid +\infty$	$\frac{1}{2}-m$	$+\infty$

pentru $m<-e^3 \Rightarrow$ 2 rădăcini; $m=-e^3 \Rightarrow$ o rădăcină, $x=-3$; $m\in\left(-e^3,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$ nicio rădăcină;

$m=\frac{1}{2}\Rightarrow$ o rădăcină, $x=0$; $m>\frac{1}{2}\Rightarrow$ 2 rădăcini.

2.a) $I=\frac{13}{24}-\cos 1$.

b) $g'(x)=\frac{-\sin x}{x}<0,\ \forall x\in(0,1]$, deci are loc cerința problemei.

c) Avem $\frac{\sin t}{t}\geq 1-\frac{t^2}{6}$, pentru $t>0$, deci $g(x)\geq\int_x^1\left(1-\frac{t^2}{6}\right)dt=\frac{17}{18}-x+\frac{x^3}{6}$.

Atunci , limita cerută $L\geq\frac{17}{18}>0,9$.