

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $x_n \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

b) Folosind o regulă a lui L'Hospital, limita cerută este egală cu 0.

c) $f'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$. Considerăm $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$ și avem

$g'(x) = -\ln(x+1) < 0, \forall x > 0$, deci $g(x) < g(0) = 0, \forall x > 0$ adică $f'(x) < 0, \forall x > 0$.

2.a) Integrând prin părți se obține $f(2) = 1 - \frac{2}{e}$.

b) $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$.

c) $f(x+1) = \int_0^1 (-e^{-t})' \cdot t^x dt = -e^{-t} \cdot t^x \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1} dt = -\frac{1}{e} + x \cdot f(x), x > 1$.