Soluții

1.a) $x_n \ln 2+\ln\frac{3}{2}+...+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

b) Folosind o regulă a lui L'Hospital, limita cerută este egală cu 0.

c) $f'(x)=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$. Considerăm $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$ și avem $g'(x)=-\ln(x+1)<0,\ \forall x>0$, deci $g(x)<g(0)=0,\ \forall x>0$ adică $f'(x)<0,\ \forall x>0$.

2.a) Integrând prin părți se obține $f(2)=1-\frac{2}{e}$.

b) $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt\le\int_0^1 t^{x-1}dt=\frac{1}{x}$.

c) $f(x+1)=\int\limits_0^1\left(-e^{-t}\right)'\cdot t^x dt=-e^{-t}\cdot t^x\Big|_0^1+\int\limits_0^1 e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}dt=-\frac{1}{e}+x\cdot f(x),\ x>1$.