Soluții

1. a) $f_n'(x) = n\sin^{n-1}x\cos x$, apoi se obține relația cerută.

b) $f_n''(x) = n\sin^{n-2}x\left(n-1-n\sin^2 x\right)$; $f_n''(x_n) = 0, x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow n$; $\sin^2 x = n-1 \Rightarrow \sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

c) $L = \lim\limits_{n\to\infty}(\sin x_n)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin x_n - 1\right)^{\frac{1}{\sin x_n - 1}\cdot n\cdot(\sin x_n - 1)}$; $L = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-1\right)\cdot n} = e^{-\frac{1}{2}}$.

2.a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = \dfrac{(2x+a)\left(x^2+1\right)-\left(x^3+ax^2+5x\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = f(x)$.

b) Aria $= \int_1^2 f(x)dx = \left.\dfrac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}\right|_1^2 = \dfrac{13}{\sqrt{5}} - \dfrac{8}{\sqrt{2}}$.

c) Cu schimbarea de variabilă $t = -x$, a doua integrală devine $\int_{-2}^{0} F(x)dx = \int_0^2 F(-t)dt$.
Relația din ipoteză devine

$$\int_0^2 \left(F(x) - F(-x)\right)dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 \frac{2ax}{\sqrt{x^2+1}}dx = 2 \Leftrightarrow a\cdot\left.\sqrt{x^2+1}\right|_0^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$