Soluții

1.a) $f_n'(x) = n \cdot \left(x^{n-1} - 1\right)$, $f_n'(x) < 0$, pentru $x \in [0,1)$; $f_n'(x) > 0$, pentru $x > 1$, de unde rezultă concluzia.

b) f_n este continuă, strict descrescătoare pe $[0,1]$ și $f_n(0) \cdot f_n(1) < 0 \Rightarrow$ o rădăcină în $(0,1)$.
f_n este continuă, strict crescătoare pe $[1,\infty)$, $f_n(1) < 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty \Rightarrow$ o rădăcină în $(1,\infty)$.

c) $f_n\left(\frac{2}{n}\right) < 0$, $f_n(0) > 0$, deci $a_n \in \left(0, \frac{2}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.a) $I_0 = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1$, deci $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

b) $I_{2n} + I_{2n-2} = \int_0^1 \frac{x^{2n-2} \cdot \left(x^2+1\right)}{x^2+1} dx$; $I_{2n} + I_{2n-2} = \frac{1}{2n-1}$, $n \geq 2$.

c) Din **b)** rezultă $I_{2n} \cdot (-1)^{n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} - I_0$. Din $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \leq \frac{1}{n+1}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, de unde concluzia.