

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluții**

**1.a)** Funcția este derivabilă pe  $\mathbb{R} - \{0\}$  și  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

**b)**  $f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Limita cerută este egală cu 0.

**c)** Știm că  $\sin t \leq t, \forall t \geq 0$ , de unde  $0 \leq f(x) \leq x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**2.a)**  $\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3}$ .

**b)** Cu substituția  $1-x=t$ , se obține  $\int_0^1 x(1-x)^n dx = \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) dt = \left( \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1$ , de unde rezultă

cerința.

**c)**  $\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = -n \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{-n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{n}{n+1}$ , de unde rezultă că limita cerută este  $1 - \frac{1}{e}$ .