Soluții

1.a) Funcția este derivabila pe $\mathbb{R}-\{0\}$ și $f'(0)=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$.

b) $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Limita cerută este egală cu 0.

c) Știm că $\sin t\le t,\ \forall t\ge 0$, de unde $0\le f(x)\le x^2\cdot\frac{1}{x^2}=1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2.a) $\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{1}{3}$.

b) Cu substituția $1-x=t$,se obține $\int_0^1 x(1-x)^n dx=\int_0^1\left(t^n-t^{n+1}\right)dt=\left.\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right)\right|_0^1$, de unde rezultă cerința.

c) $\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx=-n\left.\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{-n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{n}{n+1}$, de unde rezultă că limita cerută este $1-\frac{1}{e}$.