**Soluții**

**1. a)** Se demonstrează prin inducție.

**b)** $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x^5{}_n - x_n}{4} < 0$. Şirul fiind descrescător şi mărginit este convergent.

**c)** Avem ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^4{}_n + 3}{4} = \dfrac{3}{4}$. Din $\dfrac{x_{n+2}}{x_n} = \dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \cdot \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ şi relația anterioară, se deduce că limita cerută este $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

**2. a)** Din ipoteză avem ca $x^2 \cdot f(x) = x \cdot \sin x,\ x \in \mathbb{R}$. $I = \int_0^\pi x \sin x dx = -\int_0^\pi (\cos x)' x dx$.

$I = -x \cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx = \pi$.

**b)** Funcția $g(x) = f(x),\ x \in I - \{0\},\ g(0) = 1,\ I = [0,1]$, este continuă pe $I$ deci integrabilă.
Cum $f$ diferă de $g$ doar în $x = 0$, rezultă că şi $f$ este integrabilă pe $I$.

**c)** Avem $\dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{\sin x}{1}, \forall x \in \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Rezultă $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos 1$.