

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Se demonstrează prin inducție.

b) $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^5 - x_n}{4} < 0$. Șirul fiind descrescător și mărginit este convergent.

c) Avem ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^4 + 3}{4} = \frac{3}{4}$. Din $\frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n}$ și relația anterioară, se deduce că limita cerută este $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

2. a) Din ipoteză avem ca $x^2 \cdot f(x) = x \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. $I = \int_0^\pi x \sin x dx = -\int_0^\pi (\cos x)' x dx$.

$$I = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi.$$

b) Funcția $g(x) = f(x)$, $x \in I - \{0\}$, $g(0) = 1$, $I = [0, 1]$, este continuă pe I deci integrabilă.

Cum f diferă de g doar în $x = 0$, rezultă că și f este integrabilă pe I .

c) Avem $\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{1}$, $\forall x \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right]$. Rezultă $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos 1$.