Soluții

1.a) Funcția *f* este continuă pe $\left[0,\infty\right)$, deci nu va avea asimptote verticale. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=2$, dreapta $y=2$ este asimptota orizontală spre ∞.

b) Demonstrăm inductiv că $x_n>1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Apoi, $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1-x_n^2}{x_n+2}<0$ deci şirul este descrescător. Astfel şirul este convergent şi folosind recurența rezultă concluzia.

c) $y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-1$, deci şirul $\left(y_n\right)$ este crescător. Avem $\left|x_n-1\right|=\left|f\left(x_{n-1}\right)-1\right|=\dfrac{\left|x_{n-1}-1\right|}{x_{n-1}+2}\le\dfrac{\left|x_{n-1}-1\right|}{2}$, de unde $\left|x_n-1\right|\le\dfrac{x_0-1}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}$. Atunci $y_n\le x_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\left|x_k-1\right|\le 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}<3$, deci şirul este şi mărginit superior.

2.a) Avem că $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx=(x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}+1$.

b) $F\left(x\right)=x\int_0^x\left(1+\cos t\right)dt=x^2+x\sin x$,de unde rezultă că F este o funcție pară.

c) Dacă $0\le x_1<x_2$, atunci $0\le\int_0^{x_1}f\left(t\right)dt\le\int_0^{x_2}f\left(t\right)dt$ deoarece f este pozitivă, deci F este crescătoare pe $\left[0,\infty\right)$. Cum *F* este o funcție pară , rezultă că F este descrescătoare pe $\left(-\infty,0\right]$.