

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) f este continuă pe D , deci în aceste puncte nu avem asimptote verticale
 $f_d(-2) = -\infty, f_s(2) = \infty \Rightarrow x = -2, x = 2$ sunt asimptote verticale.

b) $f''(x) = \frac{8x}{(4-x^2)^2}$, deci $x = 0$ este punct de inflexiune.

c) Limita cerută este $L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \cdot \ln \left(\frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} \right) = \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{y^a} \cdot \ln \frac{2+y}{2-y}$.

$$L = \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{y^a} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{2y}{2-y} \right)}{\frac{2y}{2-y}} = \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{y^{a-1}} = \begin{cases} 0, a < 1 \\ 1, a = 1 \\ \infty, a > 1 \end{cases}.$$

2.a) $I = \int_0^1 \left(-x + 2 - \frac{x}{x^2 + 4} \right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 4) \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}.$

b) Avem că $I = \int_1^4 \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{-1}{2} \cdot \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2 + 4} \right)' \cdot x dx. I = \frac{1}{2} \cdot \frac{-x}{x^2 + 4} \Big|_1^4 + \frac{1}{4} \cdot \arctg \frac{x}{2} \Big|_1^4 = \frac{1}{4} \left(\arctg 2 - \arctg \frac{1}{2} \right).$

c) Cu substituția $f^{-1}(x) = t, I = \int_{\frac{7}{5}}^2 f^{-1}(x) dx = -\int_0^1 t \cdot f'(t) dt = -t \cdot f(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 f(t) dt = \frac{7}{10} - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}.$