Soluții

1. a) Limita cerută este egală cu 1.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{x}} = e^0 = 1$.

c) f' este funcție polinomială de grad 3 deci ecuația va avea cel mult 3 rădacini reale. Aplicand T. lui Rolle funcției f pe $[1,3],[3,5],[5,7]$, f' se anulează în cel puțin în 3 puncte.

2.a) Aria cerută este $A = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

b) $I = \int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+x^2\right)'\left(1+x^2\right)^{-2}dx = \frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

c) Șirul care ne interesează se scrie $a_n = n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.