

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Limita cerută este egală cu 1.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{x}} = e^0 = 1.$

c) f' este funcție polinomială de grad 3 deci ecuația va avea cel mult 3 rădăcini reale. Aplicând T. lui Rolle funcției f pe $[1,3], [3,5], [5,7]$, f' se anulează în cel puțin în 3 puncte.

2.a) Aria cerută este $A = \int_0^1 f_1(x) dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

b) $I = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2)' (1+x^2)^{-2} dx = \frac{-1}{2(1+x^2)} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$

c) Șirul care ne interesează se scrie $a_n = n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}},$ deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$