Soluții

1.a) $f' > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescatoare, deci f este injectivă.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ f$ continuă $\Rightarrow f$ surjectivă; deoarece f este bijectivă, are loc cerința problemei.

b) Din $x_n^3 + x_n + 1 = 3 + \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow x_n^3 + x_n - 2 = \dfrac{1}{n+1}$, deci $\left|x_n - 1\right| = \dfrac{1}{(n+1)\left(x_n^2 + x_n + 2\right)} \le \dfrac{1}{2(n+1)}$, pentru că $x_n > 1$, de unde rezultă concluzia.

c) $n\left(x_n - 1\right) = \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{x_n^2 + x_n + 2} \to 1 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

2.a) $f(x) = \int_0^a \dfrac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^a = \ln(a+1)$.

b) Cum $\sin t \le 1, \forall t \ge 0$, cu egalitate pentru $t = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$, avem:

$f(x) < \int_0^x \dfrac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^x = \ln(x+1)$.

c) $f(2\pi) - f(\pi) = \int_\pi^{2\pi} \dfrac{\sin t}{1+t} dt < 0$, deoarece $t \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \dfrac{\sin t}{1+t} < 0$.