

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluții**

**1.a)**  $f' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  este strict crescătoare, deci  $f$  este injectivă.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, f$  continuă  $\Rightarrow f$  surjectivă; deoarece  $f$  este bijectivă, are loc cerința problemei.

**b)** Din  $x_n^3 + x_n + 1 = 3 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow x_n^3 + x_n - 2 = \frac{1}{n+1}$ , deci  $|x_n - 1| = \frac{1}{(n+1)(x_n^2 + x_n + 2)} \leq \frac{1}{2(n+1)}$ , pentru că

$x_n > 1$ , de unde rezultă concluzia.

**c)**  $n(x_n - 1) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{x_n^2 + x_n + 2} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ .

**2.a)**  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1) \Big|_0^x = \ln(x+1)$ .

**b)** Cum  $\sin t \leq 1, \forall t \geq 0$ , cu egalitate pentru  $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$ , avem:

$f(x) < \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1) \Big|_0^x = \ln(x+1)$ .

**c)**  $f(2\pi) - f(\pi) = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt < 0$ , deoarece  $t \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \frac{\sin t}{1+t} < 0$ .