Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x)=1-\cos x\geq 0$, cu egalitate doar în punctele $2n\pi,\ n\in\mathbb{N}$.

b) Funcția *f* este continuă pe $\mathbb{R}$, deci nu are asimptote verticale. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ deci funcția f nu are asimptote orizontale. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\sin x\right)$ și aceasta nu există, funcția nu are asimptotă oblică la ∞. Analog spre $-\infty$.

c) Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, deoarece $x\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0$. Cum $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x-\sin x}{x^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, deducem că *g* este derivabilă și în *x* = 0.

2.a) *f* continuă implică faptul că *f* are primitive.

b) $I=\int_0^1\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)dx=\left(-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-2}$.

c) $f(t)\geq 0,\forall t\in[0;x],x>0\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\geq 0$ .Din ipoteză rezultă că $e^{-x}\geq -x+1\Rightarrow 1-e^{-x}\leq x\Rightarrow e^{-x}-e^{-2x}\leq xe^{-x}$, deci $\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\leq e^{-x},x>0\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\leq\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}<1$.