

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) = \frac{\ln x}{x}, f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0, \forall x \in (0, e]$, de unde se obține concluzia.

b) Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală. Nu există alte asimptote, pentru că funcția este continuă și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - (f(n+1) - f(n)) = f'(n+1) - f'(c_n) < 0$.

2.a) Aria ceruta este $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

b) $V = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$.

c) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right) \left(\sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{n} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \cos x dx = \frac{1}{2} \sin 1$.