

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \lim_{x \rightarrow \infty} \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.
- b) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare.
- c) $x_2 = f(0) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow x_1 > x_2$ și f este strict crescătoare $\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător. $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit inferior de $-\frac{3\pi}{2}$, deci conform Teoremei lui Weierstrass este convergent.
2. a) g este continuă, deci are primitive, iar derivata oricărei primitive este pozitivă, deci orice primitivă este crescătoare.
- b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = f(x) x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$
- c) $\int_0^1 x f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{\pi x}{2} dx$, de unde concluzia.