

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Rezolvare**

1. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$

b)  $x \in (-1, 1) \rightarrow f'(x) = \arcsin x + \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \frac{x-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}. \lim_{x \nearrow 1} f'(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{\pi}{2}.$

$f$  nu este derivabilă în  $-1$ .

c)  $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} - (x-1) \cdot \frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1-x}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}} \geq 0 \Rightarrow f$  este convexă.

2. a) 
$$\left. \begin{aligned} F'(x) = f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}, \quad \forall x \neq 1 \\ F'(1) = f(1) = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F \text{ este strict crescătoare pe } \mathbb{R}.$$

b)  $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$  deci  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .  $F$  fiind continuă, rezultă că  $F$  este surjectivă, deci conform punctului a) este bijectivă.

c)  $\int_0^a F^{-1}(x) dx = \int_0^1 t f(t) dt = \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{29}{20}.$