Rezolvare

1. **a**) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0.$

b) Funcția este continuă în punctele care nu sunt numere întregi, iar într-un punct $n \in \mathbb{Z}$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x) = 0$ şi $f(x) = 0$. Deci f este continuă pe intervalul $[0, 3]$.

c) Explicitând funcția observăm că 1 şi 2 sunt puncte unghiulare şi f este derivabilă pe $[0, 3] \setminus \{1, 2\}$.

2. **a**) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\sin x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2-\sin x)'}{2-\sin x} dx = -\ln(2-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$

b) $F'(x) = f(x)$ şi $f(x) > 0$ deoarece $2 - \sin x \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci F este strict crescătoare.

c) $\frac{1}{2-\sin t} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt \geq \frac{t}{3}\Big|_0^x = \frac{x}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty.$