Rezolvare

1. **a)** $f_n(x)=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}g(x),\ \forall x\neq -1 \Rightarrow f_n{}'(x)=\dfrac{g_n{}'(x)}{x+1}-\dfrac{g_n(x)}{(x+1)^2}.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}}{\dfrac{3}{2}}-\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}+1}{\dfrac{9}{4}}\right]=-\dfrac{4}{9}.$

c) $f_n'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$, cu $h(x)=(x+1)g_n'(x)-g_n(x)=2nx^{2n+1}+(2n+1)x^{2n}-1$. Deoarece h' este negativă pe $(-1,0)$ şi pozitivă pe $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$, iar $h(-1)=0,\ h(0)=-1,\ \lim\limits_{x\to\infty}h(x)>0$ reiese că există exact un punct $a\in(0,\infty)$, astfel încât f este strict descrescătoare pe $(-\infty,a]$ şi strict crescătoare pe $[a,\infty)$.

2. **a)** $\mathrm{I}_2=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\cdot\ln 2.$

b) $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{1+x^3}dx<0.$

c) $0\leq \mathrm{I}_n\leq\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{I}_n=0.$