

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = +\infty.$

b) $f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x; \quad f''(x) = -x + \sin x.$

c) $f'''(x) = -1 + \cos x \leq 0 \Rightarrow f''$ este strict descrescătoare $\Rightarrow f''(x) \leq f''(0), \forall x \geq 0 \rightarrow f''(x) \leq 0 \rightarrow$
 $\rightarrow f'$ este strict descrescătoare $\rightarrow f'(x) \leq f'(0), \forall x \geq 0.$

$f'(x) \leq 0 \rightarrow f$ este strict descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$ și $f(0) = 0 \rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \geq 0.$

2. a) $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{x^2+1} = f(x).$

b) $\int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

c) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ reprezintă sume Riemann asociate funcției f , diviziunilor

$D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$ și punctelor intermediare $X_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right).$ Deoarece funcția este integrabilă, fiind continuă, iar șirul normelor diviziunilor tinde la 0, șirul $(a_n)_n$ este convergent.