

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Rezolvare**

1. a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = m$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 - x} + x \right) \frac{1}{2} = n \Rightarrow y = -x + \frac{1}{2}$  este asimptotă oblică spre  $-\infty$ .  
b)  $f$  este derivabilă pe intervalul  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  și 0 și 1 sunt puncte de întoarcere ale graficului.  
c)  $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ ;  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  și  $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$ ;  $x \in (0, 1)$ . Pentru  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $f$  este

strict descrescătoare, iar pentru  $x \in (1, +\infty)$ ,  $f$  este strict crescătoare.  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , deci 0 și 1 sunt puncte

de minim (și de întoarcere), iar  $\frac{1}{2}$  este punct de maxim.

2. a)  $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = x \Big|_0^1 - \arctg x \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$ .

b)  $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ .

c) Din (b)  $\Rightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ , folosind monotonia lui  $(I_n)_{n \geq 1}$ . Conform criteriului cleștelui

avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} n I_n = \frac{1}{2}$ .