

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. a) $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2+1} - \frac{1}{x^2+1}.$

b) $x+2 > x \Rightarrow \arctg(x+2) > \arctg x \Rightarrow f(x) > 0.$

f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, -1)$ și strict descrescătoare pe intervalul $[-1, \infty)$ deci -1 este maxim global. $f(-1) = \arctg 1 - \arctg(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

c) Se arată că $g'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

2. a) $\int_1^2 \frac{x^2-1+\frac{1}{1+x^2}}{x} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2.$

b) $f(x) \geq \frac{x^3}{3} - x - \frac{\pi}{2} \rightarrow \int_0^x f(t) dt \geq \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot x.$ Deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^3} = +\infty.$

c) $g(x) \geq f(x), \forall x \in [0, 1] \Rightarrow A = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$