

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. a) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow f'$ este strict crescătoare.
- b) Se poate demonstra prin calcul sau aplicând Teorema lui Lagrange.
- c) Se adună relațiile de la (b) de la $k=1$ până la $k=n$ și astfel se obține marginea șirului $(a_n)_{n \geq 1}$. Șirul este evident crescător, deci este convergent conform Teoremei lui Weierstrass.
2. a) $f_1(x) = \int_0^1 t \cdot \arctg t = \frac{t^2}{2} \cdot \arctg t \Big|_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \arctg x.$
- b) $f_n(1) = \int_0^1 t^n \cdot \arctg t dt \leq \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 t^n dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1}.$
- c) $f_n(1) = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right)' \cdot \arctg t dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1} dt. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1} dt = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot f_n(1) = \frac{\pi}{4}.$