Rezolvare

1. **a**) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}} > 0,\ \forall x > 0.$

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ și cum f este strict crescătoare, rezultă că $f(x) < 0,\ \forall x > 0.$

c) $a_{n+1} - a_n = f(n)$ și, conform **b**), $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2. **a**) $f_3'(x) = x^3 \arcsin x.$

b) $f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} t \cdot \arcsin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x) \cdot x \cos x dx = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x dx = -\dfrac{x}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = -\dfrac{\pi}{48} + \dfrac{\sqrt{3}}{16}.$

c) Deoarece f_2 este derivabilă, deci continuă, limita cerută este $f_2(1) = \int_0^1 t^2 \arcsin t dt = \dfrac{\pi}{6}$, deoarece

$\int_0^x t^2 \arcsin t dt = \dfrac{x^3}{3}\arcsin x - \dfrac{1}{3}\int_0^x \dfrac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt = \dfrac{x^3}{3}\arcsin x + \dfrac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} + \dfrac{1}{9}.$