

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Rezolvare**

1. a)  $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} > 0, \forall x > 0.$

b) Avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  și cum  $f$  este strict crescătoare, rezultă că  $f(x) < 0, \forall x > 0.$

c)  $a_{n+1} - a_n = f(n)$  și, conform b),  $(a_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător.

2. a)  $f'_3(x) = x^3 \arcsin x.$

b)  $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} t \cdot \arcsin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x) \cdot x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x dx = -\frac{x}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = -\frac{\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{16}.$

c) Deoarece  $f_2$  este derivabilă, deci continuă, limita cerută este  $f_2(1) = \int_0^1 t^2 \arcsin t dt = \frac{\pi}{6},$  deoarece

$$\int_0^x t^2 \arcsin t dt = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{9}.$$