Rezolvare

1. **a**) $f'(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $f''(x)=\dfrac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0\Rightarrow f'$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a\le 0$ este evident, iar pentru $a>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^{-a}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{-ax^{-a-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^{a+1}}{a\left(e^x+1\right)}=0$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ln 1=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1=m$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=0$, deci $y=0$ este o asimptotă orizontală la $+\infty$ și $y=x$ este o asimptotă oblică la $-\infty$. Asimptotele verticale nu există, deoarece funcția este continuă pe $\mathbb{R}$.

2. **a**) $I_1=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=x^2\Big|_0^2-\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^2=\dfrac{4}{3}$

b) $\mathrm{I}_n=\int_0^2\left(2x-x^2\right)^n(x-1)'\,dx=\left(2x-x^2\right)^n(x-1)\Big|_0^2-n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}(2-2x)(x-1)\,dx=$

$=-2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\left(-x^2+2x-1\right)dx=-2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^n dx+2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\Rightarrow(2n+1)\mathrm{I}_n=2n\,\mathrm{I}_{n-1}$.

c) Avem $I_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi din punctul **b)** $I_{n-1}=I_n+\dfrac{1}{2n}I_n>I_n$, $\forall n\ge 2$ (1). Astfel şirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde $l\ge 0$, iar $I_n\ge l$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Adunând relațiile (1) avem $I_1=\dfrac{1}{4}I_2+\dfrac{1}{6}I_3+\ldots+\dfrac{1}{2n}I_n\ge\dfrac{l}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$,

de unde $l\le\dfrac{2I_1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)=\infty$, deducem că $l=0$.