

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Rezolvare**

1. a)  $f'(x) = 3\left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) = 3 \cdot \frac{x^4}{1+x^2} > 0.$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  și  $f$  este continuă, deci este surjectivă. Conform (a)  $f$  este injectivă.

c) Singura valoare pentru  $a$  este 3 și limita este 1.

2. a)  $I_1 = \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1.$

b)  $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^x (x^{n+1} - x^n) dx \leq 0$ , deci  $(I_n)_{n \geq 1}$  este descrescător și mărginit inferior de 0.

c)  $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} (e^x)' dx = e - I_n - n I_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n I_n = e$ , deoarece  $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$