

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. a) $f'(x) = \ln x + 1$. Pe intervalul $\left(0, \frac{1}{e}\right]$, f este strict descrescătoare, iar intervalul $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$, f este strict crescătoare.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Deci f nu are asimptote.

c) Din $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ rezultă inductiv că $x_n \in (0, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De aici obținem și $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. a) $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{4x+5} dx = \frac{1}{8} - \frac{5}{16} + \frac{25}{64} \cdot \ln \frac{9}{5} = -\frac{3}{16} + \frac{25}{64} \cdot \ln \frac{9}{5}$.

b) $4I_{n+1} + 5I_n = \int_0^1 \frac{x^n(4x+5)}{4x+5} dx = \frac{1}{n+1}$.

c) $I_{n+1} - I_n \leq 0 \rightarrow \frac{1}{9(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{9n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n I_n = \frac{1}{9}$.