Rezolvare

1. **a**) $f'(x)=\ln x+1$. Pe intervalul $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, f este strict descrescătoare, iar intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, f este strict crescătoare.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$. Deci f nu are asimptote.

c) Din $x_{n+1}={x_n}^{x_n}$ rezultă inductiv că $x_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. De aici obținem și $x_{n+1}>x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

2. **a**) $\mathrm{I}_2=\int_0^1\frac{x^2}{4x+5}dx=\frac{1}{8}-\frac{5}{16}+\frac{25}{64}\cdot\ln\frac{9}{5}=-\frac{3}{16}+\frac{25}{64}\cdot\ln\frac{9}{5}$.

b) $4\mathrm{I}_{n+1}+5\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{x^n(4x+5)}{4x+5}dx=\frac{1}{n+1}$.

c) $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n\le 0\to\frac{1}{9(n+1)}\le\mathrm{I}_n\le\frac{1}{9n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} n\mathrm{I}_n=\frac{1}{9}$.