

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1.a) $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0, \forall x > 0.$

b) Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right) = \infty(0-1) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 1 = 0.$ În plus, f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux. Astfel, mulțimea valorilor funcției este $(-\infty, 0).$

c) Funcția este continuă, deci nu are asimptote verticale în punctele domeniului de definiție. În 0, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 1 = 0,$ deci nici aici nu există asimptotă verticală. Din **a)** rezultă că nu există

asimptotă orizontală. În sfârșit, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+x) = \infty,$ deci nu există asimptotă oblică spre $\infty.$

2.a) $\int_0^1 f(x) dx = x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{\pi - 2 \ln 2}{4}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(\ln t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\ln x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg(\ln x) = \frac{\pi}{2},$ folosind regula lui l'Hospital pentru cazul

$\frac{\infty}{\infty}$ și faptul că funcția $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_1^x f(\ln t) dt$ are derivata $g'(x) = f(\ln x).$

c) $s_n = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$ este sumă Riemann atașată funcției $f,$ intervalului $[0,1],$ diviziunii $D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$ și punctelor intermediare $X_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right).$

Astfel, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi - 2 \ln 2}{4}.$