

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1.a) $f'(x) = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}, f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{\pi}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctg x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1, \text{ folosind regula lui}$

l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$. Obținem $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$.

c) Avem $x_2 = \frac{\pi}{4} < 1 = x_1$ și demonstrăm inductiv că șirul este strict descrescător. Cum el este și cu termeni pozitivi, rezultă că este convergent.

2.a) $\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{30}.$

b) $I_n = \frac{2x-1}{2} (x-x^2)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{n}{2} (2x-1)^2 (x-x^2)^{n-1} dx = \frac{n}{2} \int_0^1 \left((x-x^2)^{n-1} - 4(x-x^2)^n \right) dx = \frac{n}{2} I_{n-1} - 2n I_n.$

c) Din **b)**, $I_n < \frac{1}{4} I_{n-1}$. De aici rezultă inductiv $I_n < \frac{1}{4^n} I_0 = \frac{1}{4^n}$. Cum $I_n > 0$, limita cerută este 0.