rezolvare

1.a) $f'(x)=\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\dfrac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-1$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$. Obținem $y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$, ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$.

c) Avem $x_2=\dfrac{\pi}{4}<1=x_1$ și demonstrăm inductiv că șirul este strict descrescător. Cum el este și cu termeni pozitivi, rezultă că este convergent.

2.a) $\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)dx=\dfrac{1}{30}$.

b) $I_n=\dfrac{2x-1}{2}(x-x^2)^n\Big|_0^1+\int_0^1\dfrac{n}{2}(2x-1)^2(x-x^2)^{n-1}dx=\dfrac{n}{2}\int_0^1\left((x-x^2)^{n-1}-4(x-x^2)^n\right)dx=\dfrac{n}{2}I_{n-1}-2nI_n$.

c) Din **b)**, $I_n<\dfrac{1}{4}I_{n-1}$. De aici rezultă inductiv $I_n<\dfrac{1}{4^n}I_0=\dfrac{1}{4^n}$. Cum $I_n>0$, limita cerută este 0.