

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

$$1.a) f'(x) = \frac{a\sqrt{x^2+x+1} - (ax+b) \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{(a-2b)x+2a-b}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

b) Trebuie ca $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă funcția liniară de la numărătorul derivatei este constantă și pozitivă, adică $a = 2b > 0$.

c) Conform b), în acest caz funcția este strict crescătoare. Cum funcția este și continuă, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, mulțimea valorilor funcției este $(-2, 2)$.

$$2.a) f'(x) = e^{\arcsin x} > 0, \forall x \in [-1, 1].$$

b) Cu schimbarea de variabilă $t = \sin u, dt = \cos u du$ obținem $f(x) = \int_0^{\arcsin x} e^u \cos u du$.

$$c) f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \cos u du = e^u \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \sin u du = e^{\frac{\pi}{2}} + e^u \cos u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \cos u du = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - f(1).$$

$$\text{Rezultă } f(1) = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}.$$