

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1.a) $f'_d(1) = \lim_{x \searrow 1} f'(x) = \lim_{x \searrow 1} \frac{2-x}{e^x} = \frac{1}{e}$ și $f'_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{x-2}{e^x} = -\frac{1}{e}$.

b)

x	$-\infty$	1	2	∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	∞	$\searrow 0$	$\nearrow 1/e^2$	$\searrow 0$

Pentru $m < 0$ nu avem soluții, pentru $m = 0$ sau $m > 1/e^2$ avem o soluție, pentru $m = 1/e^2$ avem două soluții, iar pentru $0 < m < 1/e^2$ avem trei soluții.

c)
$$\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^3} + \dots + \frac{n-1}{e^n} = \left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots + \frac{1}{e^n} \right) + \left(\frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^4} + \dots + \frac{1}{e^n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{e^{n-1}} + \frac{1}{e^n} \right) + \frac{1}{e^n} =$$

$$= \frac{1}{e^2} \frac{1 - \frac{1}{e^{n-1}}}{1 - \frac{1}{e}} + \frac{1}{e^3} \frac{1 - \frac{1}{e^{n-2}}}{1 - \frac{1}{e}} + \dots + \frac{1}{e^{n-1}} \frac{1 - \frac{1}{e^2}}{1 - \frac{1}{e}} + \frac{1}{e^n} \frac{1 - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} \left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots + \frac{1}{e^n} \right) - \frac{n}{1 - \frac{1}{e}} \frac{1}{e^n} \rightarrow \frac{1}{(e-1)^2}.$$

2.a) $F'(x) = (2a+c)x \cos x - ax^2 \sin x + (c-b) \sin x \Rightarrow a = -1, b = c = 2.$

b)
$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{4x^2} \sin \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2x} \Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

c) Observăm că $f(x) < g(x), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică $x \sin x + x < \pi, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Avem $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - f(x)) dx =$

$$= \left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{12} - \pi + 2.$$