rezolvare

1.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$

b) Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c) Deoarece arctg este funcție strict crescătoare, funcția dată are aceleaşi puncte de extrem local ca şi funcția $g:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, adică $x=0$.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \left(\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi^3}{48}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2} = +\infty.$

c) $f'(x) = -\sin x + x;\ f''(x) = 1-\cos x \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x^2 - 1 + \dfrac{x^4}{2} \ge 0 \Rightarrow \cos x^2 \ge 1 - \dfrac{x^4}{2} \Rightarrow \int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx \ge \dfrac{9}{10}.$