Soluție

1.b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-f(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$.

b) $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$. Deoarece $f'(x)>0, \forall x\in[1,\infty)$, rezultă că funcția f este strict crescătoare.

c) Funcția f este injectivă fiind strict crescătoare. Cum f este continuă pe $[1,\infty)$, $f(1)=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, iar f este strict crescătoare, rezultă că imaginea funcției f este $[1,\infty)$, deci f este surjectivă.

2. a) Funcția F trebuie să fie derivabilă. Din continuitatea în 1 rezultă $a+b=1$,
iar din derivabilitatea în 1 rezultă $a=0$. Deci $a=0$ și $b=1$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\ln x=t$. Rezultă $\int_1^e \frac{1}{xF(x)}dx=\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

Dar $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=arctgt\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$, deci $\int_1^e \frac{1}{xF(x)}dx=\frac{\pi}{4}$.

c) $\int_1^\pi h(x)h''(x)\,dx=\int_1^\pi h(x)\left(h'(x)\right)'dx=h(x)h'(x)\Big|_1^\pi-\int_1^\pi\left(h'(x)h'(x)\right)dx$. Deoarece $h(1)=h(\pi)=0$ rezultă $h(x)h'(x)\Big|_1^\pi=0$. Deci $\int_a^b h(x)h''(x)\,dx=-\int_a^b\left(h'(x)\right)^2dx\le 0$.