**Soluție**

**1.a)** *f* este continuă pe $\left(0,1\right]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții continue. Cum $\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right|\le|x|$ și $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{\pi}{x}=0$. Deci $\lim\limits_{x\searrow 0}f\left(x\right)=0=f\left(0\right)$. Prin urmare *f* este continuă şi în 0. Rezultă că *f* este continuă pe $\left[0,1\right]$.

**b)** *f* este derivabilă pe $\left(0,1\right]$ deoarece, pe acest interval, este produs de funcții derivabile.

Întrucât limita $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\sin\frac{\pi}{x}$ nu există, $f$ nu este derivabilă în 0.

**c)** Ecuația se scrie $g\left(x\right)=0$, unde $g:\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\cos\frac{\pi}{x}$. Cum $g$ este continuă, $g\left(\frac{1}{n+1}\right)=\left(-1\right)^{n+2}$ și $g\left(\frac{1}{n}\right)=\left(-1\right)^{n+1}$, rezultă că funcția $g$ se anulează în cel puțin un punct din $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$.

**2.a)** $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\int_0^1\ln\left(1+x\right)dx=x\ln\left(1+x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 2-x\Big|_0^1+\ln\left(1+x\right)\Big|_0^1=2\ln 2-1.$

**b)** $\int_0^1 g\left(x\right)dx=\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

**c)** Considerăm funcția $\varphi=f-g$. Atunci: $\varphi'\left(x\right)=\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg}x$ și $\varphi''\left(x\right)=-\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Deoarece $\varphi''\left(x\right)\le 0$, rezultă că $\varphi'$ este descrescătoare, deci $x\ge 0\Rightarrow\varphi'\left(x\right)\le\varphi'\left(0\right)\Rightarrow\varphi'\left(x\right)\le 0$.
Prin urmare $\varphi$ este descrescătoare, de unde $x\ge 0\Rightarrow\varphi\left(x\right)\le\varphi\left(0\right)\Rightarrow\varphi\left(x\right)\le 0\Rightarrow f\left(x\right)\le g\left(x\right)$.

Ca atare aria căutată este $A=\int_0^1\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)dx=-\frac{\pi}{4}-\ln 2+\frac{3}{2}$.