**Soluție**

**1. a)** Avem $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$ şi următorul tabel de variație al funcției *f*:

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+++$ | $0$ | $---$ | $0$ | $+++$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Din tabelul de variație rezultă că $-1$ şi 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

**b)** Deoarece $f$ este continuă, $f(1)=-2<m$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, rezultă că ecuația are soluție în mulțimea $(1,\infty)$. Cum *f* este strict crescătoare pe $(1,\infty)$, rezultă că $f$ este injectivă pe $(1,\infty)$, deci soluția este unică.

**c)** Deoarece $g(x)=f^2(x)=x^6-6x^4+9x^2$, rezultă $g'(x)=6x^5-24x^3+18x$, de unde $g''(x)=30x^4-72x^2+18$.

Pentru a rezolva ecuația $g''(x)=0$, notăm $x^2=t$ şi rezultă $6\left(5t^2-12t+3\right)=0$ care are soluțiile $t_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{84}}{10}$. Deci ecuația $g''(x)=0$ are soluțiile $\pm\sqrt{t_1},\pm\sqrt{t_2}$. Ținând cont de semnul funcției $g''$, rezultă că *g* are patru puncte de inflexiune.

**2.a)** $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=f(0)\Rightarrow f$ continuă în 0. Rezultă $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$. $f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

**b)** $\int xe^x dx=e^x(x-1)+C$, iar $\int \sin x dx=-\cos x+\mathcal{C}$.

Deci o primitivă a funcției $f$ va fi de forma: $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+c_1, & x\le 0 \\ -\cos x+c_2, & x>0 \end{cases}$.

Din condiția de continuitate a lui *F* rezultă $c_1=c_2=F(0)+1=0$.

**c)** Deoarece *F* este o primitivă a lui *f*, rezultă $\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$, deci limita de calculat este $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x^2}$. Cu regula lui l´Hôspital: $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F'(x)}{2x}$. Apoi $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.