

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x) = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

b) f' este negativă pe $(-\infty, 0)$ și pozitivă pe $(0, \infty)$, deci valoarea minimă este $f(0) = 1$.

c) $f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{\frac{e^x - 1 - x}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \sqrt{\frac{e^x - 1 - x}{x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. a) $f(3) = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2 - 1} = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

b) $g(x) = F\left(\ln \frac{x^2 - 1}{3}\right) - F(0)$, unde F este o primitivă a funcției $t \rightarrow \sqrt{3e^t + 1}$.

Rezultă $g'(x) = \sqrt{3e^{\ln \frac{x^2 - 1}{3}} + 1} \cdot \left(\ln \frac{x^2 - 1}{3} \right)' = x \cdot \frac{2x}{x^2 - 1}$, $\forall x \in (1, \infty)$.

c) Avem $g'(x) = 2f'(x)$, deci $g(x) - 2f(x) = \text{constant} = g(2) - 2f(2) = 0$.