Soluție

1.a) $f'(x)=1 \Leftrightarrow e^x-1=1 \Leftrightarrow x=\ln 2$.

b) f' este negativă pe $(-\infty,0)$ și pozitivă pe $(0,\infty)$, deci valoarea minimă este $f(0)=1$.

c) $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\sqrt{\dfrac{e^x-1-x}{x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ și $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\sqrt{\dfrac{e^x-1-x}{x^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. a) $f(3)=\int_2^3\dfrac{t^2}{t^2-1}=\left(t+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}.$

b) $g(x)=F\left(\ln\dfrac{x^2-1}{3}\right)-F(0)$, unde F este o primitivă a funcției $t\to\sqrt{3e^t+1}$.

Rezultă $g'(x)=\sqrt{3e^{\ln\frac{x^2-1}{3}}+1}\cdot\left(\ln\dfrac{x^2-1}{3}\right)'=x\cdot\dfrac{2x}{x^2-1},\ \forall x\in(1,\infty)$.

c) Avem $g'(x)=2f'(x)$, deci $g(x)-2f(x)=\text{constant}=g(2)-2f(2)=0$.