

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)** Succesiv rezultă:

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1} = \lim_{x \nearrow 1} \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}} = -\infty.$$

**b)** Aplicând corect reguli de derivare, rezultă  $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$ . Tabelul de variație al funcției  $f$  este:

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$1$	$\infty$	
$f'(x)$	+++++		+++++	0 - - - - -		+++++
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$\sqrt[3]{4} \searrow$	$0 \nearrow$	$\infty$	

Din tabelul de variație al funcției rezultă că  $-1$  și  $1$  sunt punctele de extrem ale funcției  $f$ .

**c)** Funcția  $f$  este derivabilă în orice punct  $x$  care satisface condiția  $x^3 - 3x + 2 \neq 0$ . Deci domeniul de derivabilitate al funcției  $f$  este  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .

**2. a)** Descompunem în fracții simple:  $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ .  $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$ . Deci

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx = \ln \frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1} + C.$$

**b)** Deoarece  $t \in (1, \infty)$  rezultă  $t > 1, t+1 > 2, t+2 > 3 \Rightarrow t(t+1)(t+2) > 6 \Rightarrow \frac{1}{t(t+1)(t+2)} < \frac{1}{6}$ .

Atunci, pentru  $x > 1$  rezultă  $\int_1^x \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt < \int_1^x \frac{1}{6} dt = \frac{x-1}{6}$ . Egalitatea are loc dacă  $x = 1$ .

**c)** Utilizăm schimbarea de variabilă:  $x^3 = t$ . Rezultă  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ .

Dar  $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctgt \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ . Rezultă  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{12}$ .