

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)** Deoarece  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ , rezultă că dreapta de ecuație  $y = \frac{2}{3}$  este asimptotă orizontală spre  $-\infty$ .

**b)** Avem  $f(1) = 1$  și  $0 < f(n) \leq \frac{9}{10}$ ,  $\forall n \geq 2$ , deci  $0 < a_n \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**c)**  $g'(x) = -\frac{7e^x}{(3e^x + 4)^2}$ ,  $g''(x) = \frac{7e^x(3e^x - 4)}{(3e^x + 4)^3}$ . punctul de inflexiune este  $\ln \frac{4}{3}$ .

**2 a)**  $\int_0^1 f(e^x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$ .

**b)**  $V = \pi \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = \pi$ .

**c)** Utilizăm schimbarea de variabilă  $\sqrt{\ln x} = t$ , apoi o integrare prin părți:

$$\int_1^e \sqrt{\ln x} dx = \int_0^1 2t^2 e^{t^2} dt = \int_0^1 (e^{t^2})' t dt = t e^{t^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{t^2} dt = e - \int_0^1 e^{t^2} dt = e - \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

$$\text{Prin urmare } \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e f(x) dx = \int_0^1 e^{x^2} dx + e - \int_0^1 e^{x^2} dx = e.$$