Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{3}$, rezultă că dreapta de ecuație $y=\frac{2}{3}$ este asimptotă orizontală spre ∞.

b) Avem $f(1)=1$ şi $0<f(n)\le\frac{9}{10}$, $\forall n\ge 2$, deci $0<a_n\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

c) $g'(x)=-\frac{7e^x}{(3e^x+4)^2}$, $g''(x)=\frac{7e^x\left(3e^x-4\right)}{(3e^x+4)^3}$. punctul de inflexiune este $\ln\frac{4}{3}$.

2 a) $\int_0^1 f(e^x)dx=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

b) $V=\pi\int\limits_1^e \ln x dx=\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=\pi$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $\sqrt{\ln x}=t$, apoi o integrare prin părți:

$$\int\limits_1^e\sqrt{\ln x}dx=\int\limits_0^1 2t^2e^{t^2}dt=\int\limits_0^1\left(e^{t^2}\right)'tdt=te^{t^2}\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^{t^2}dt=e-\int\limits_0^1 e^{t^2}dt=e-\int\limits_0^1 e^{x^2}dx.$$

Prin urmare $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx+\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_0^1 e^{x^2}dx+e-\int\limits_0^1 e^{x^2}dx=e$.