Soluție

1.a) Avem $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 > 0, \forall n \geq 1$, deci şirul este strict crescător, de unde concluzia.

b) Funcția g este derivabilă pe fiecare din intervalele (–∞, 0) şi (0, ∞) şi $g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}$.

Cum g este continuă în 0 şi $\lim\limits_{x \nearrow 0} g'(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} g'(x) = 1$, rezultă că g este derivabilă în 0 şi $g'(0) = 1$.

c) Numărul cerut este valoarea minimă a funcției $h : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x.$ Acesta este $h(1) = 2$.

2.a) $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t} dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$.

b) Aplicăm regula lui l´Hôspital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x F'(\cos x)}{2x} = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{\sin x}{2x} \cdot f(\cos x)\right) = -\frac{1}{2} f(1) = -\frac{1}{2}e^{-1}.$$

c) $g'(x) = F'(x) + f'(x) = f(x) - 2xe^{-x^2} = (1 - 2x)e^{-x^2}$, deci g are unicul punct de extrem $x = \frac{1}{2}$.