Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=0\cdot\dfrac{\pi}{2}=0$.

b) f este derivabilă şi $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},\forall x\in\mathbb{R}$. Ținând cont de semnul derivatei, rezultă că – 1 este punct de minim local, iar 1 este punct de maxim local.

c) Considerăm funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-g(x)$. Rezultă $h'(x)=-\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. Deoarece $h'(x)<0,\forall x\in(0,\infty)$, rezultă că h este descrescătoare pe $(0,\infty)$. Deci $h(x)<h(0),\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow h(x)<0,\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow\dfrac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}x,\forall x\in(0,\infty)$

2.a) Funcția f este continuă pe $[0,1]$, deci este integrabilă pe acest interval. Funcția $g:[1,2]\to\mathbb{R},g(x)=x\ln x$ este continuă, deci este integrabilă pe $[1,2]$. Deoarece $f(x)=g(x),\forall x\in[1,2]\setminus\{1\}$, rezultă că f este integrabilă pe $[1,2]$. Fiind integrabilă pe $[0,1]$ şi pe $[1,2]$, rezultă f integrabilă pe $[0,2]$.

b) Fie F o primitivă a funcției $\varphi:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=t\ln t$. Atunci: $\int_1^x t\ln t\,dt=F(x)-F(1)$.

Rezultă $\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=F_d'(1)$. Deoarece $F_d'(1)=\varphi(1)=0$ rezultă că limita este egală cu 0.

c) Arătăm că există $a\in[0,t)$ şi $b\in(t,2]$ astfel încât $\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx=(b-a)f(t)$, adică $\int_0^b f(x)dx-bf(t)=\int_0^a f(x)dx-af(t)$. Considerăm funcția $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(y)=\int_0^y f(x)dx-yf(t)$. Avem $g'(y)=f(y)-f(t)$, deoarece f este strict crescătoare, deci g este strict descrescătoare pe $[0,t]$ şi strict crescătoare pe $[t,2]$. Aceasta garantează existența numerelor a şi b.