Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{(x+1)^3+x+1}=1$.

b) Deoarece $f'(x)=3x^2+1>0$, rezultă că f este strict crescătoare , deci este injectivă.

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, iar f este strict crescătoare şi continuă rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Fiind injectivă şi surjectivă f este bijectivă, deci este inversabilă.

c) Pentru $x\ge 1$, $f\left(\sqrt[3]{x}\right)=x+\sqrt[3]{x}>x$ şi $f\left(\sqrt[3]{x}\right)-1=x-3\sqrt[3]{x}^2+4\sqrt[3]{x}-2=x-\sqrt[3]{x}\left(3\sqrt[3]{x}-4+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)<x$, deci soluția ecuației $f(y)=x$ se află între $\sqrt[3]{x}-1$ şi $\sqrt[3]{x}$. Astfel $1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}<\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}<1$, de unde $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}=1$.

2.a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$, deoarece f este impară.

b) $\displaystyle\int_1^3\frac{f(x)}{\sin x}dx=\int_1^3 x^2dx$. Dar $\displaystyle\int_1^3 x^2dx=2c^2\Leftrightarrow\frac{26}{3}=2c^2$. Rezultă $c=\sqrt{\dfrac{13}{3}}\in(1,3)$.

c) $F(x)=\left(-x^2+2\right)\cos x+2x\sin x$. Considerăm şirul $(x_n')_{n\ge1}$, $x_n'=2n\pi.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n')=-\infty$.

Considerând şirul $(x_n'')_{n\ge1}$, $x_n''=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n'')=\infty$. Prin urmare funcția F nu are limită la ∞.