

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și $f'(0) > 0$, deci f' are semn constant pozitiv. Astfel f este strict

crescătoare, continuă, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$, de unde

concluzia.

b) Cum $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă relația cerută.

c) Fie funcția $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = g(x) - x$. Rezultă $\varphi'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1$. Deoarece $\varphi'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă φ strict descrescătoare pe \mathbb{R} . Prin urmare, pentru orice $x > 0$ rezultă $\varphi(x) < \varphi(0)$. Cum $\varphi(0) = 0$, se obține inegalitatea cerută.

2.a) Într-adevăr f este derivabilă și $f(0) = f(1) = 0$, iar $\int_0^1 f(x) dx = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 0$.

b) Deoarece $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$, rezultă $\int_0^1 f(x) dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$ și

$f(0) = d, f(1) = a + b + c + d$. Prin urmare, condiția $f \in M$ este echivalentă cu

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0 \end{cases}, \text{ de unde: } a \in \mathbb{R}, a \neq 0, b = -\frac{3a}{2}, c = \frac{a}{2}, d \in \mathbb{R}. \text{ Rezultă}$$

$$f(x) = ax^3 - \frac{3a}{2}x^2 + \frac{a}{2}x + d, a \in \mathbb{R}, a \neq 0, d \in \mathbb{R}. \text{ Atunci } f\left(\frac{1}{2}\right) = d = f(0).$$

c) Aplicăm teorema de medie: există $c \in (0,1)$ astfel încât $\int_0^1 f(x) dx = f(c)$. Rezultă $f(c) = f(0)$ și $f(c) = f(1)$.

Conform teoremei lui Rolle, există $\alpha \in (0,c)$ și $\beta \in (c,1)$ astfel încât $f'(\alpha) = 0, f'(\beta) = 0$.