Soluție

1.a) *f* este continuă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,1)$ și $(1,\infty)$, deoarece *f* este cât de funcții continue.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1=f(1)$ rezultă că f este continuă în 1.

b) Aplicăm regula lui l'Hôspital. Rezultă $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{2x(x-1)}=-\dfrac{1}{2}$.

c) Avem $f'(x)=\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$ și avem de arătat că $g(x)=x-1-x\ln x<0,\ \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. Cum $g'(x)=-\ln x$, rezultă tabelul de variație următor, din care rezultă concluzia.

x	0 1 ∞
$g'(x)$	$+++++++++\ 0\ ---------$
$g(x)$	$\nearrow$ 0 $\searrow$

2.a) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui *f*. Atunci $F'(x)=\ln(1+\sin^2 x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $1+\sin^2 x\ge 1$ rezultă $F'(x)=\ln(1+\sin^2 x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\sin x=t$. Rezultă $\int_0^{\pi} f(x)\cos dx=\int_0^0\ln\left(1+t^2\right)dt=0$.

c) Funcția f, fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite o primitivă. În plus, $g(x)=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)dt=F(\arcsin x)-F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$,

de unde $g'(x)=\arcsin' x\cdot F'(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2\right)$.