Soluție

1.a) $f_2'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, \infty)$.

b) Cum $f_n\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f_n(1) = \left(\frac{1}{e^n} - 1\right) \cdot 1 < 0$ și f este continuă rezultă că ecuația $f_n(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$. Cum f_n este strict crescătoare, rădăcina este unică.

c) Folosind de două ori regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{3}{f_2(x) - 1} - \frac{1}{x - 1}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{3x - 2 - x^2 - \ln x}{(x-1)\left(x^2 + \ln x - 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{-2 + \frac{1}{x^2}}{6x + \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{6}.$$

2. a) Considerăm funcțiile, $g : [-2\pi, 0] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ și $H : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1 + \sin x$.
Deoarece $f(x) = g(x), \forall x \in [-2\pi, 0] \setminus \{0\}$ și g este integrabilă pe $[-2\pi, 0]$ rezultă f integrabilă pe $[-2\pi, 0]$.
Analog, deoarece $f(x) = h(x), \forall x \in [0, 2\pi]$ și h este integrabilă pe $[0, 2\pi]$ rezultă f integrabilă pe $[0, 2\pi]$.
Prin urmare f este integrabilă pe $[-2\pi, 0] \cup [0, 2\pi] = [-2\pi, 2\pi]$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{\pi} (1 + \sin x)\,dx = \pi + \frac{7}{4}.$

c) $\int_{0}^{2\pi} (1 + \sin x)^n\,dx \le \int_{0}^{2\pi} (1 + \sin x) \cdot 2^{n-1}\,dx = 2^{n-1}(x - \cos x)\Big|_{0}^{2\pi} = 2^n \pi.$